Milieux : interactions, interfaces, homogénéité, ruptures :

Dynamique des populations : Etude du risque de surpopulation

Lycée La Salle St Charles, Saint-Pierre, 97410
2017/2018
MP

Dubard Loïc
Monnier Clément
Alcaraz Angelo

Plan:

I) Approche naïve

II) Création de modèles

III) Analyse des taux et tests

Plan:

I) Approche naïve

II) Création de modèles

III) Analyse des taux et tests

I) Approche naïve

a) *Modèle discret*

Modèle de Leslie :

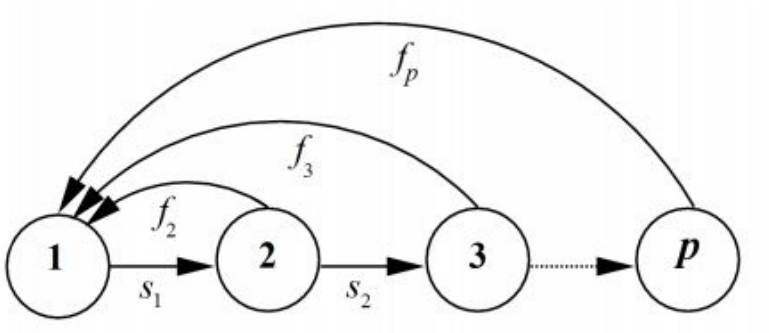
$$\text{On pose : } \forall n \in \mathbb{N} : U_n = \begin{pmatrix} u_1^{(n)} \\ u_2^{(n)} \\ \vdots \\ u_p^{(n)} \end{pmatrix}$$

où $u_i^{(n)}$ désigne la population au pas de temps n de la classe d'âge i

I) Approche naïve

a) *Modèle discret*

Modèle de Leslie :



$\forall k \in [[1, 2p]] : s_k = 1 - r_k - m_k$

Où r_k :rapport du nombre de personne de la classe k
qui reste dans la même classe au pas de temps suivant sur le nombre d'individu de la classe

f_k : taux de fécondité pour la classe k

m_k : taux de mortalité pour la classe k

I) Approche naïve

a) *Modèle discret*

Équation pour chaque classe au temps n+1 en fonction des effectifs au pas de temps n :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_1^{(n+1)} = f_1 u_1^{(n)} + \ldots + f_p u_p^{(n)} + r_1 u_1^{(n)}$$

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N} \times [[2,p]] : u_k^{(n+1)} = r_k u_k^{(n)} + s_{k-1} u_{k-1}^{(n)}$$

Équation matricielle de Leslie

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = LU_n$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N} : U_n = L^n U_0$$

Où $L \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} f_1 + r_1 & f_2 & f_3 & \ldots & f_p \\ s_1 & r_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & s_2 & r_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & s_{p-1} & r_p \end{pmatrix}$$

I) Approche naïve

a) *Modèle discret*

Théorème de Perron- Frobenius :

Théorème *Perron-Frobenius*

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs et primitive. Il existe X un vecteur propre pour M à coordonnées strictement positives et associé à $\rho \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$\rightarrow dim(\mathrm{Ker}(M - \rho\, I_n)) = 1$

$\rightarrow \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(M), |\lambda| \leqslant \rho$

On appelle rayon spectral de M le réel ρ mis en évidence.

I) Approche naïve

a) *Modèle discret*

Théorème de Perron- Frobenius :

Corollaire *Soit M une matrice de Leslie de taille n et ρ son rayon spectral donné par théorème de Perron-Frobenius. On note $X_0 \in \mathbb{R}_+^n$ le vecteur représentant la population initiale suivant n classes d'ages. Si on définit $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall p \in \mathbb{N}, X_{p+1} = M X_p$.*

$$\textit{Alors } \lim_{p\longrightarrow+\infty} \left(\frac{\sum_{1\leqslant k\leqslant n} (X_{p+1})_k}{\sum_{1\leqslant k\leqslant n} (X_p)_k} \right) = \rho.$$

I) Approche naïve

a) *Modèle discret*

Théorème de Perron- Frobenius :

Corollaire *Soit M une matrice de Leslie de taille n et $\rho > 0$ son rayon spectral donné par théorème de Perron-Frobenius. On note (X_n^i) l'effectif de la i-ème classe au temps n, tout cela étant défini par la relation de récurrence :*

$$\forall i \in \{1, ..., p\}, \forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1}^i = M X_n^i$$

Alors l'un des trois cas suivants est envisageable:

$\rho > 1$ *l'effectif de la population diverge exponentiellement vers $+\infty$.*

$\rho = 1$ *l'effectif de la population converge vers une configuration stable égale au vecteur propre associé à ρ, noté X_0.*

$\rho < 1$ *l'effectif de la population décroit exponentillement vers 0.*

I) Approche naïve

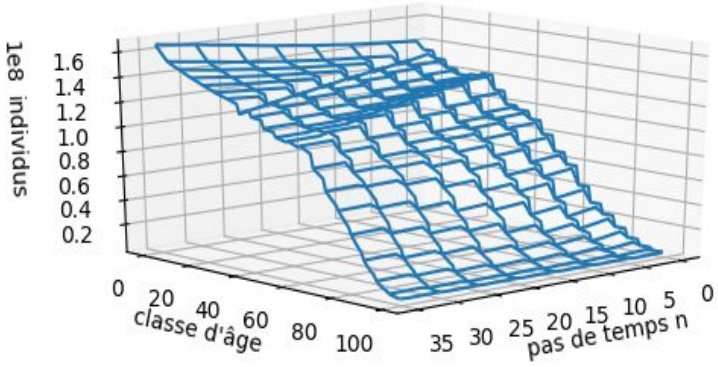
a) *Modèle discret*

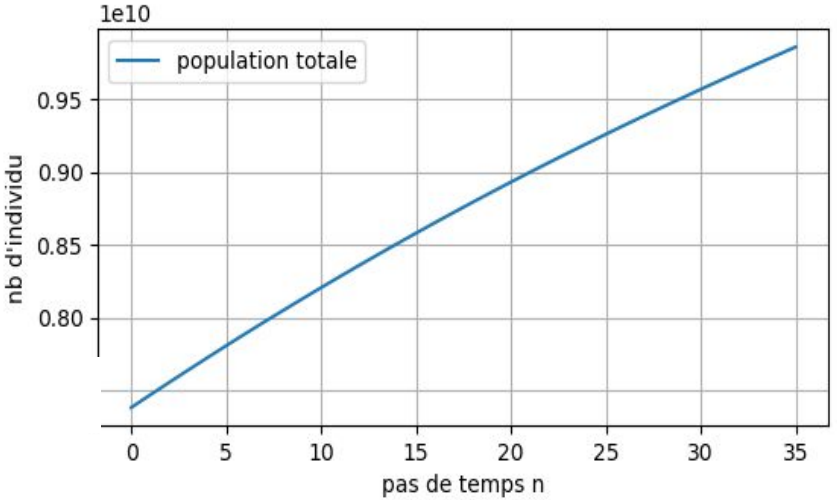
Vérification des hypothèses sur la population mondiale :

$$\rho > 1,019 > 1$$

Donc la population mondiale devrait diverger exponentiellement.

Evolution de la population mondiale en 100 classes d'âges selon le modèle de Leslie
(temps discret)





I) Approche naïve

b) Modèle continu

Equation de Mc Kendrick- Von Foerster :

$n(t,a) \longrightarrow$ densité de population dépendant du temps t et de l'âge a.

$P(t) = \int_0^\infty n(t,a) \longrightarrow$ population à l'instant t

$\mu(t,a), \phi(t,a) \longrightarrow$ taux de mortalité et de fertilité

I) Approche naïve

b) *Modèle continu*

Equation de Mc Kendrick- Von Foerster :

Durant un temps dt, il meurt $\mu(t,a)\,n(t,a)\,dt$ personnes.

On a donc : $dn(t,a) = \frac{\partial n}{\partial t}dt + \frac{\partial n}{\partial a}da = -\mu(t,a)\,n(t,a)\,dt$

$da \approx dt \Longrightarrow$ $\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial a} = -\mu(t,a)\,n(t,a)\,dt}$ (équation de McKendrick-Von Foerster)

I) Approche naïve

b) *Modèle continu*

Equation de Mc Kendrick- Von Foerster:

1. Les taux de fertilité et de mortalité sont constants au cours du temps
2. $n(0,a) = n_0(a)$ (distribution initiale en age)
3. $\forall t \in \mathbb{R}_+ : n(t,0) = \int_0^\infty \phi(a)\, n(t,a) da$ (naissances au temps t)

I) Approche naïve

b) *Modèle continu*

Forme semi-résolue de la densité de population :

$$n(t,a) = f(t-a)\, exp\left(-\int_0^a \mu(\varphi)\, d\,\varphi\right)$$

Solution de l'équation :

Avec L_f la transformée de Laplace de f, et $M : a \to \phi(a) \exp\left(-\int_0^a \mu(\varphi) d\varphi\right)$, on a :

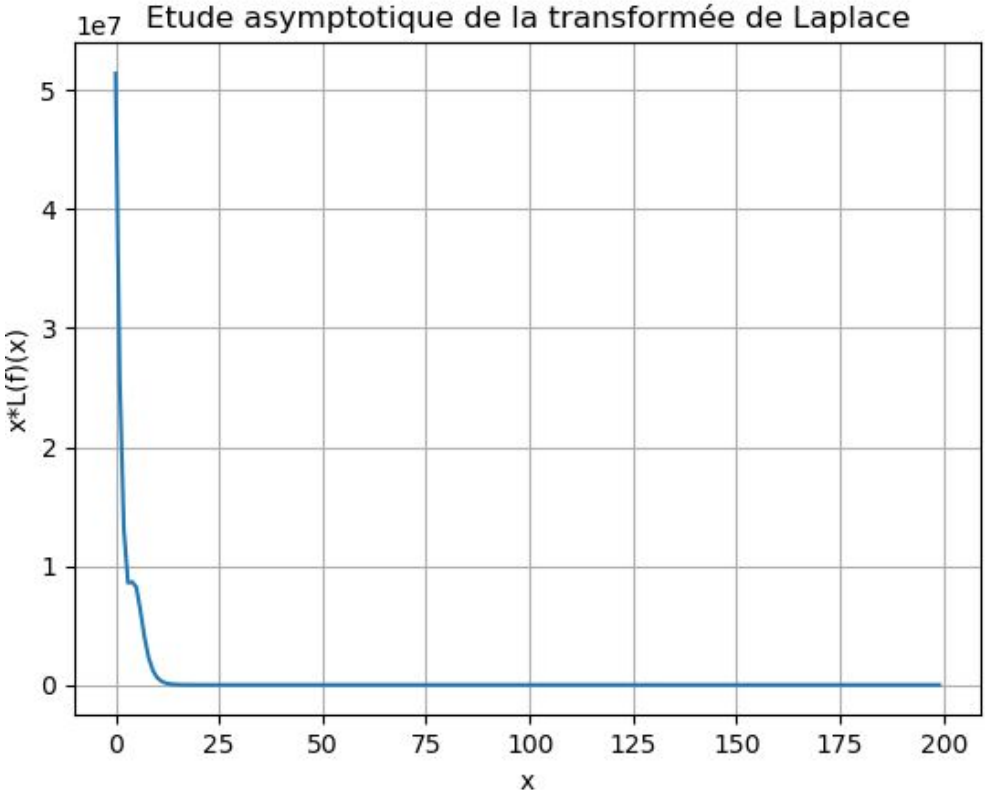
$$L_f(\lambda) = \frac{1}{1 - L_M(\lambda)} \int_0^{\infty} M(a)\, exp(-\lambda\, a)\, d\, a \int_{-a}^{0} n_0(-u)\, exp\left(\int_0^{-u} \mu\right) exp(-\lambda\, u) d\, u$$

I) Approche naïve

b) Modèle continu

Ainsi on observe ici L=0

Donc d'après l'étude précédente la population finale décroît jusqu'à s' éteindre



Plan:

I) Approche naïve

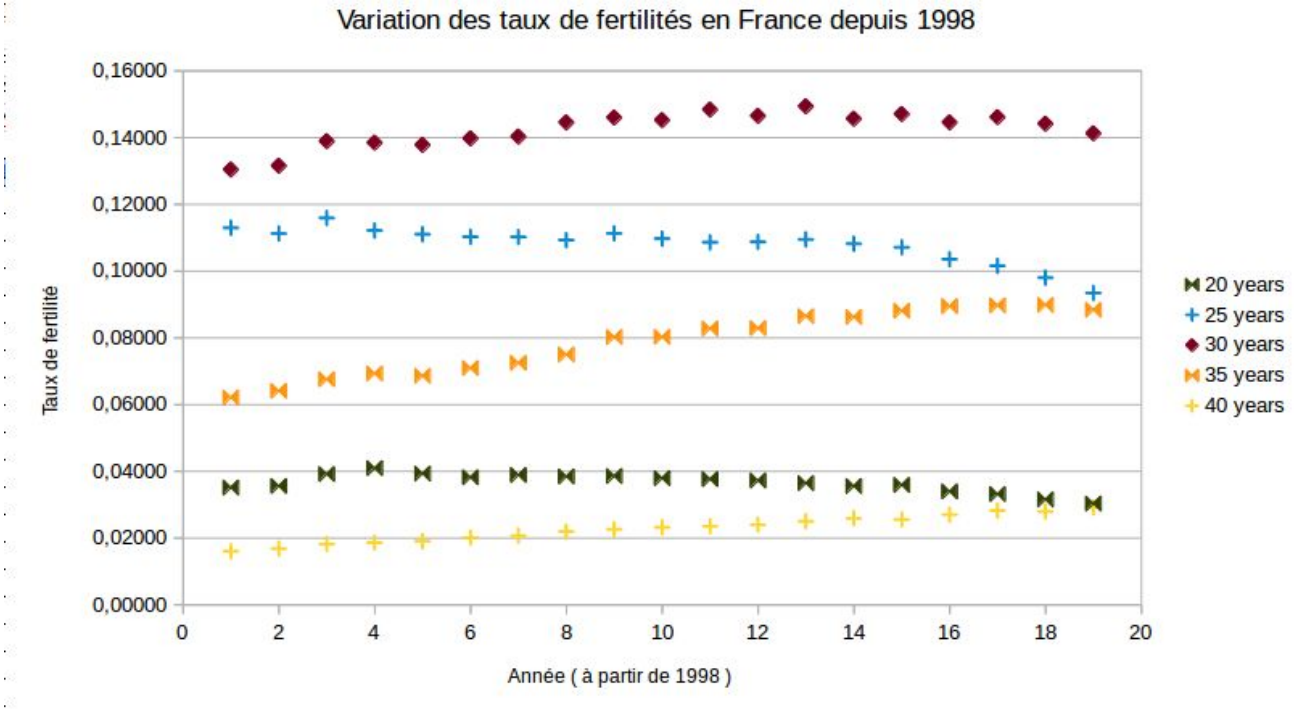
II) Création de modèles

III) Analyse des taux et tests

II) Création de modèles

Améliorations/Hypothèses:

- Etude d'un pays
- Prise en compte de l'immigration/ émigration
- Hypothèse des taux presque constants
- Séparation des classes homme et femme
- Prise en compte d'un taux de rencontre

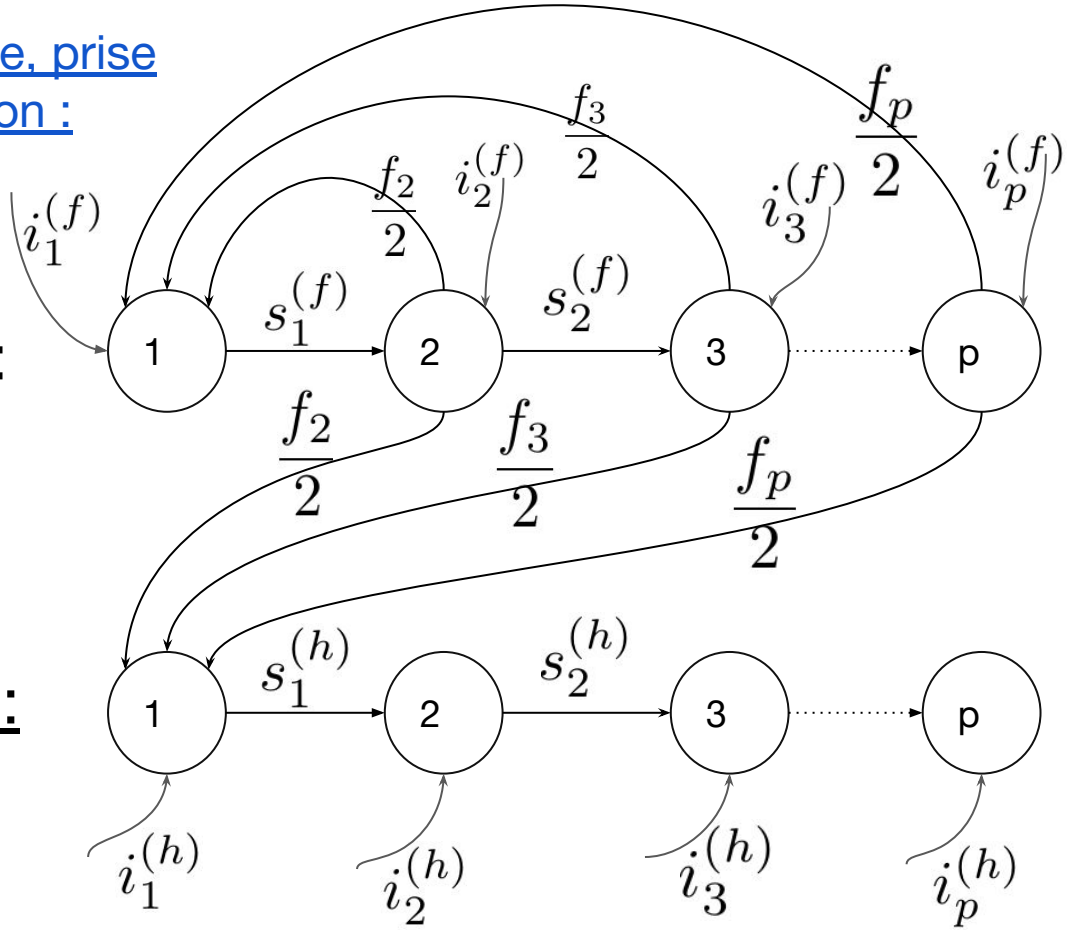


II) Création des modèles

Distinction homme/femme, prise en compte de l'immigration :

Femmes :

Hommes :



II) Création des modèles

a) Modèle discret

Présentation des variables :

On pose : $\forall n \in \mathbb{N} : U_n = \begin{pmatrix} u_1^{(n)} \\ u_2^{(n)} \\ \vdots \\ u_p^{(n)} \end{pmatrix}$ où les termes impairs désignent les femmes et les termes pairs les hommes.

$$\forall k \in [[1, 2p]] : s_k = 1 - r_k - \grave{m}_k - e_k$$

Où e_k : taux d'émigration pour la classe k

i_k : taux d'immigration pour la classe k

II) Création des modèles

a) *Modèle discret*

Equation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} u_1^{(n+1)} = \frac{f_1}{2} u_1^{(n)} + \frac{f_2}{2} u_3 + \ldots + \frac{f_k}{2} u_{2k-1}^{(n)} + \ldots + \frac{f_p}{2} u_{2p-1}^{(n)} + (r_1 + i_1) u_1^{(n)} \\ u_2^{(n+1)} = \frac{f_1}{2} u_1^{(n)} + \frac{f_2}{2} u_3 + \ldots + \frac{f_k}{2} u_{2k-1}^{(n)} + \ldots + \frac{f_p}{2} u_{2p-1}^{(n)} + (r_2 + i_2) u_2^{(n)} \end{cases}$$

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N} \times [[3, 2p]] : u_k^{(n+1)} = (r_k + i_k) u_k^{(n)} + s_{k-2} u_{k-2}^{(n)}$$

II) Création des modèles

a) *Modèle discret*

Equation pratique :

Ainsi maintenant, $L \in \mathscr{M}_{2p}(\mathbb{R})$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \frac{f_1}{2}+i_1+r_1 & 0 & \frac{f_2}{2} & \dots & \frac{f_p}{2} & 0 \\ \frac{f_1}{2} & i_2+r_2 & \frac{f_2}{2} & \dots & \frac{f_p}{2} & 0 \\ s_1 & 0 & i_3+r_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & i_4+r_4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & s_{p-1} & 0 & i_{2p}+r_{2p} \end{pmatrix}$$

f_k désigne le nombre d'enfants par individu pour la classe k (hommes +femmes)

Avec toujours : $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = LU_n$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N} : U_n = L^n U_0$$

II) Création des modèles

a) *Modèle discret*

Introduction d'une probabilité de rencontre :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} u_1^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{p} \frac{f'_k u_{2k}^{(n)}}{2(u_{2k-1}^{(n)} + u_{2k}^{(n)})} u_{2k-1}^{(n)} + (r_1 + i_1) u_1^{(n)} \\ u_2^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{p} \frac{f'_k u_{2k}^{(n)}}{2(u_{2k-1}^{(n)} + u_{2k}^{(n)})} u_{2k-1}^{(n)} + (r_2 + i_2) u_2^{(n)} \end{cases}$$

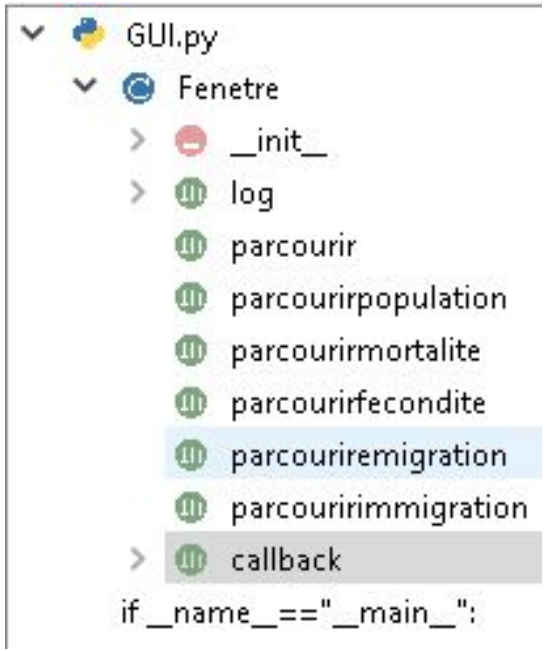
$$\forall (n,k) \in \mathbb{N} \times [[3, 2p]] : u_k^{(n+1)} = (r_k + i_k) u_k^{(n)} + s_{k-2} u_{k-2}^{(n)}$$

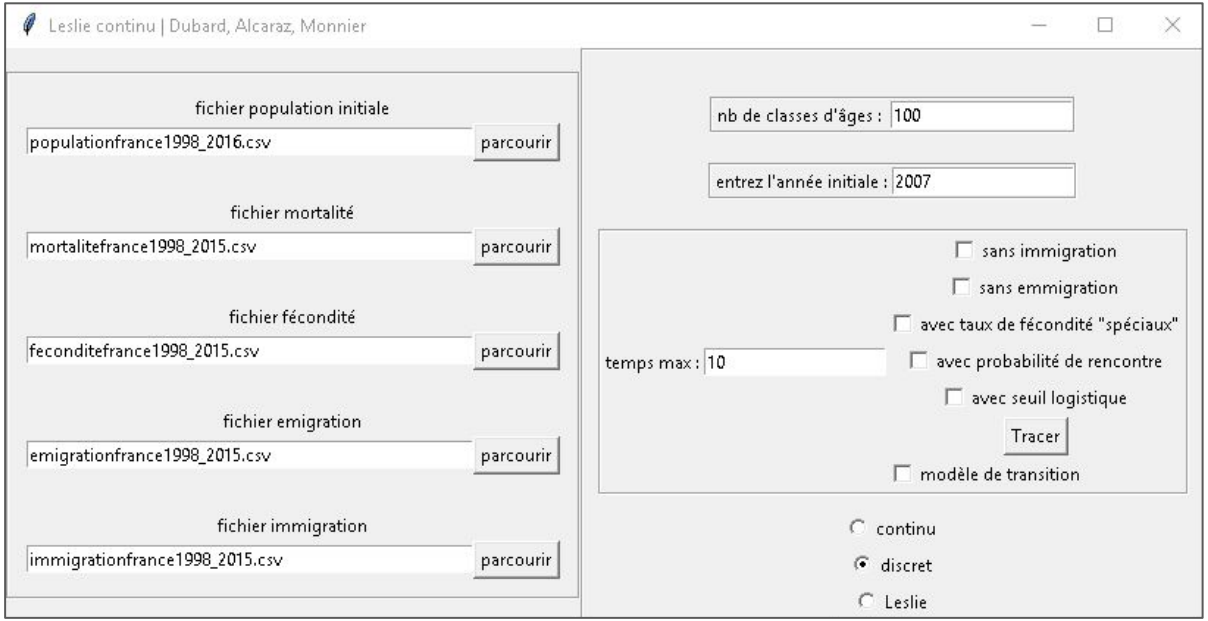
Où $\forall k \in [[1,p]] : f'_k = f_k \frac{u_{2k-1}^{(0)} + u_{2k}^{(0)}}{u_{2k}^{(0)}}$

II) Création des modèles

a) *Modèle discret*

Structure du programme :

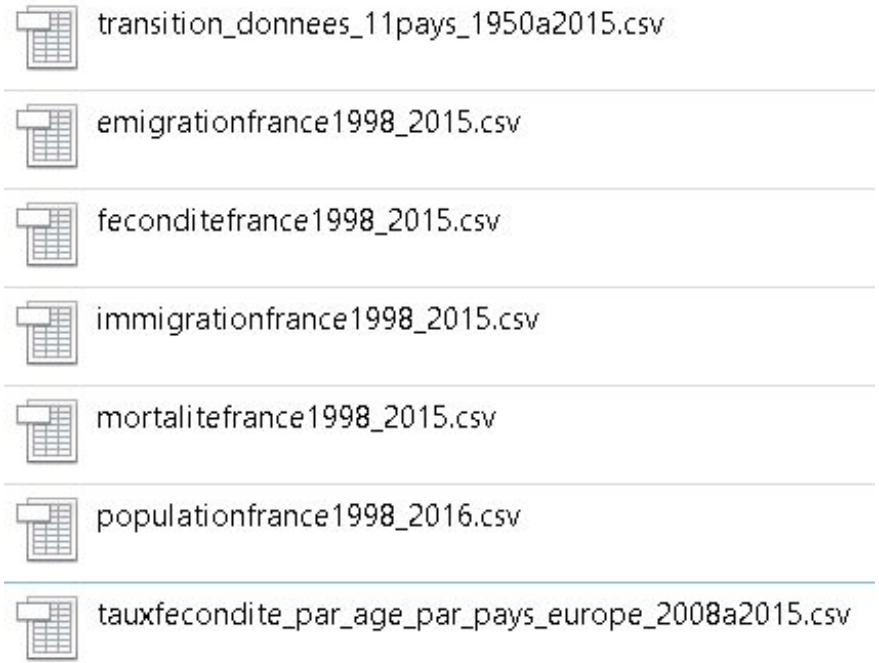




II) Création des modèles

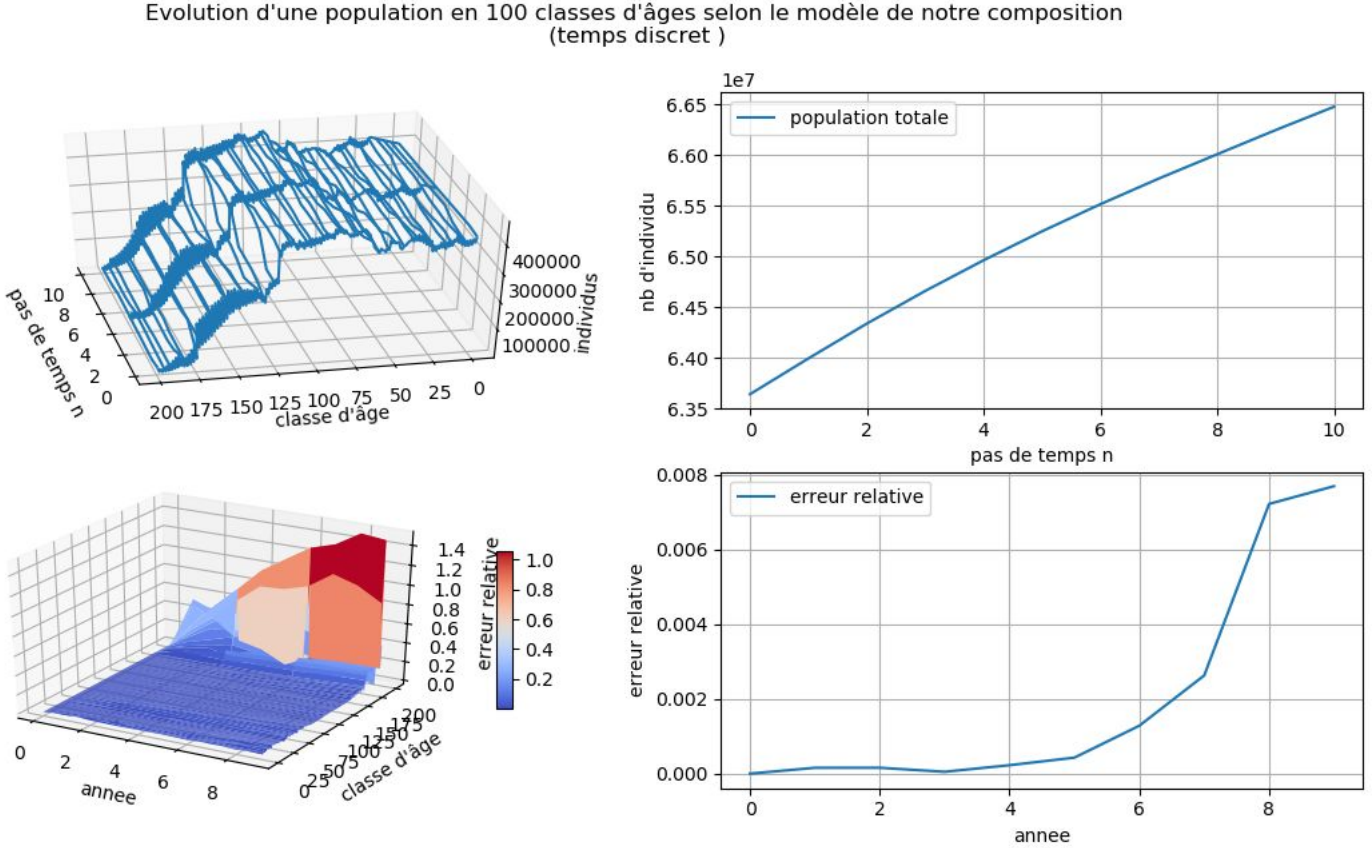
a) *Modèle discret*

Structure du programme :



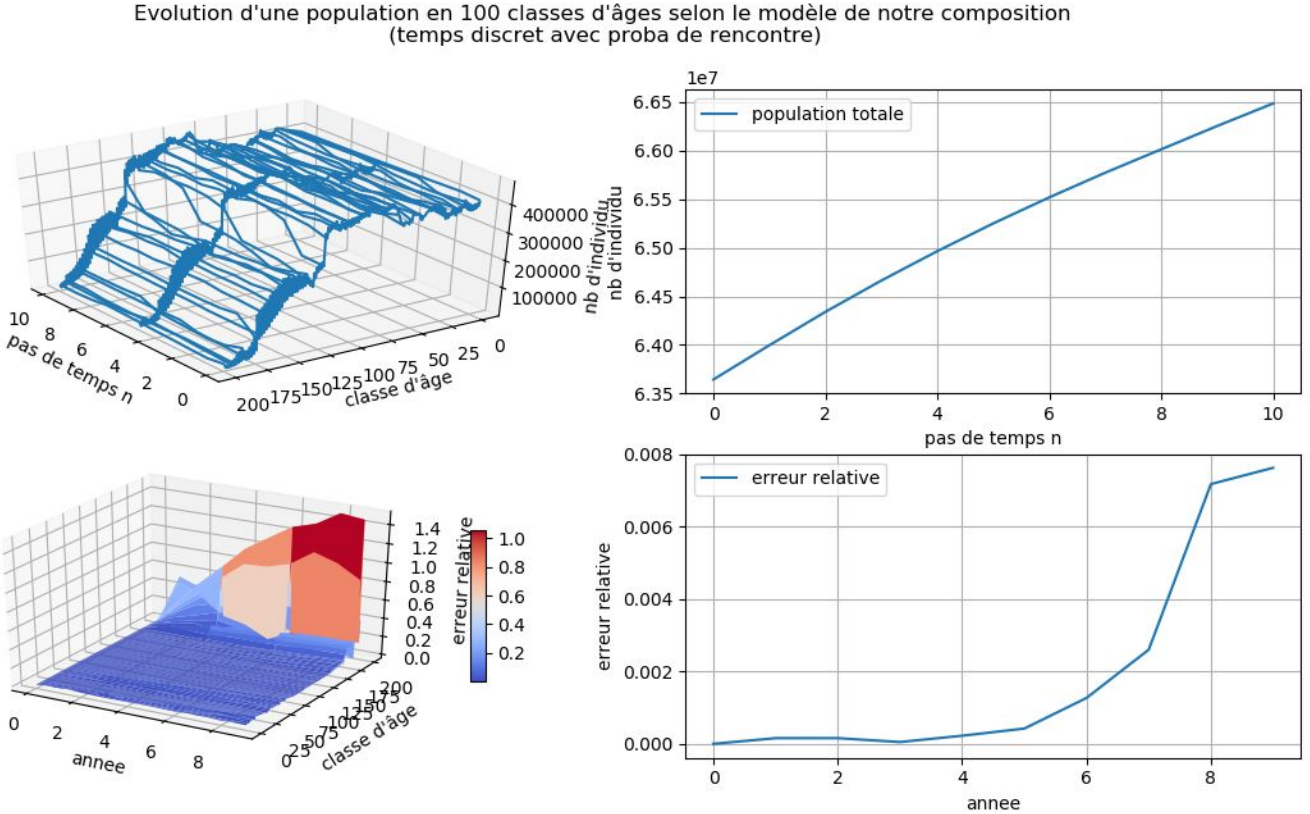
II) Création de modèles

a) *Modèle discret*



II) Création de modèles

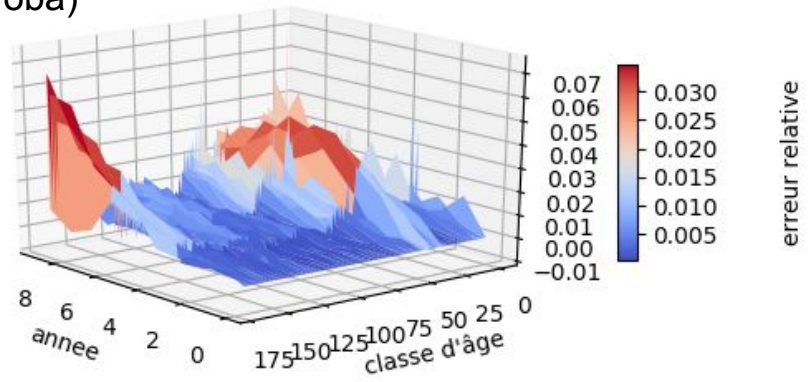
a) *Modèle discret*



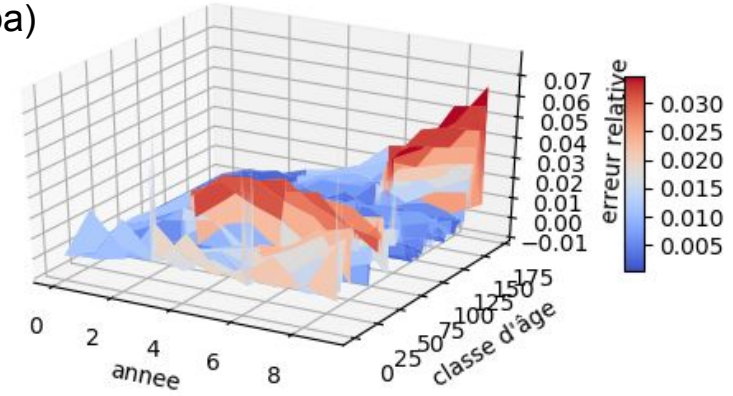
II) Création de modèles

a) *Modèle discret*

Evolution de l'écart relatif de chaque classe d'âge en fonction du temps de 0 à 85 ans (avec proba)



Evolution de l'écart relatif de chaque classe d'âge en fonction du temps de 0 à 85 ans (sans proba)



Amélioration de l'écart relatif (non visible sur les graphiques) sur la population totale en france au bout de 9 ans de moins de 8e-05 points

II) Création de modèles

b) Modèle continu

Choix du modèle :

$(h_k)_{1\leq k\leq p}$ (respectivement $(w_k)_{1\leq k\leq p}$) : suites de fonctions associées à la population des hommes (respectivement femmes)

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ : \begin{cases} h_1(t+dt) = \sum_{k=1}^{p} \frac{f_k}{2} w_k(t) + (r_1^{(h)} + i_1^{(h)}) h_1(t) \\ w_1(t+dt) = \sum_{k=1}^{p} \frac{f_k}{2} w_k(t) + (r_1^{(w)} + i_1^{(w)}) w_1(t) \end{cases} \quad (1)$$

$$\forall (t,k) \in \mathbb{R}^+ \times [[2,p]] : \begin{cases} h_k(t+dt) = (r_k^{(h)} + i_k^{(h)}) h_k(t) + s_{k-1}^{(h)} h_{k-1}(t) \\ w_k(t+dt) = (r_k^{(w)} + i_k^{(w)}) w_k(t) + s_{k-1}^{(w)} w_{k-1}(t) \end{cases}$$

$$\forall (t,k) \in \mathbb{R}^+ \times [[1,p]] : \begin{cases} dh_k(t) = h_k(t+dt) - h_k(t) \\ dw_k(t) = w_k(t+dt) - w_k(t) \end{cases}$$

II) Création de modèles

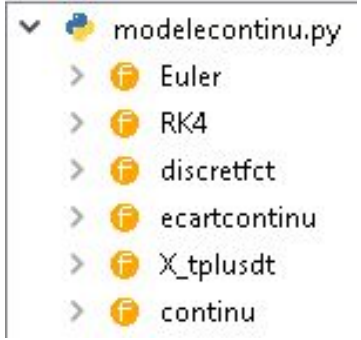
b) Modèle continu

Introduction de la probabilité de rencontre :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ : \begin{cases} h_1(t+dt) = \sum_{k=1}^{p} \frac{f'_k h_k(t)}{2(w_k(t)+h_k(t))} w_k(t) + (r_1^{(h)} + i_1^{(h)}) h_1(t) \\ w_1(t+dt) = \sum_{k=1}^{p} \frac{f'_k h_k(t)}{2(h_k(t)+w_k(t))} w_k^{(t)} + (r_1^{(w)} + i_1^{(w)}) w_1(t) \end{cases}$$

II) Création de modèles

b) *Modèle continu*



Résolution :

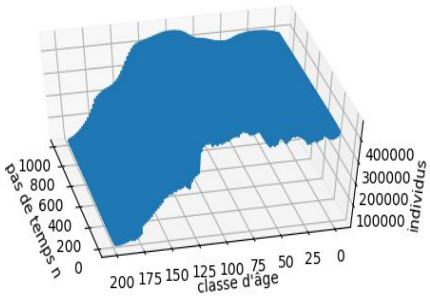
Résolution numérique par la méthode de Runge kutta 4 d'une équation de la forme : $U'(t) = F(U,t)$ où ici :

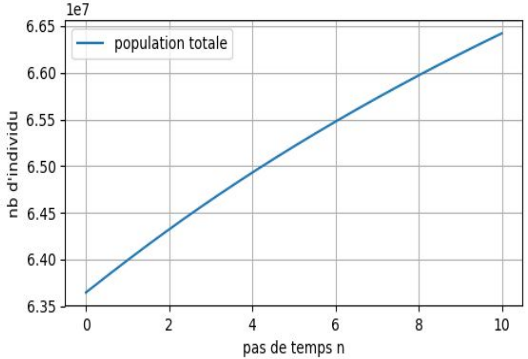
$$\begin{array}{ccccc} U & : & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^{2p} \\ & & t & \mapsto & \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \\ \vdots \\ u_{2p}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ h_1(t) \\ \vdots \\ w_p(t) \\ h_p(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

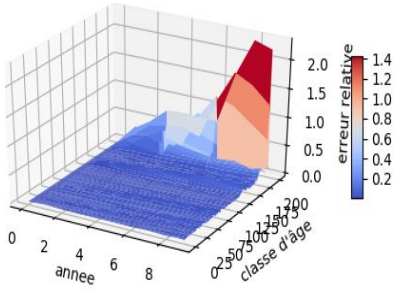
II) Création de modèles

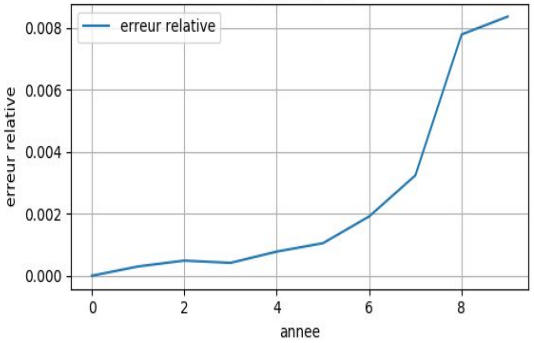
b) *Modèle continu*

Evolution d'une population en 100 classes d'âges selon le modèle de notre composition
(temps continu : 1000 valeurs)

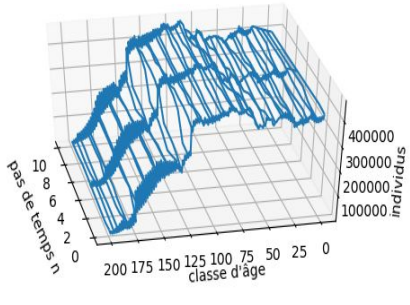


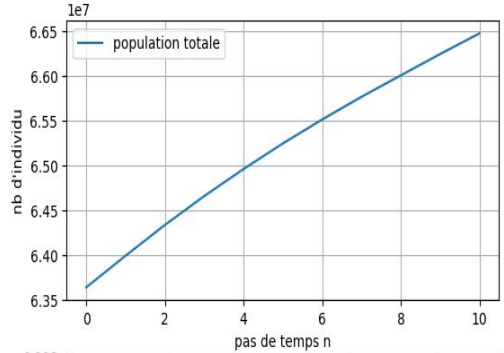


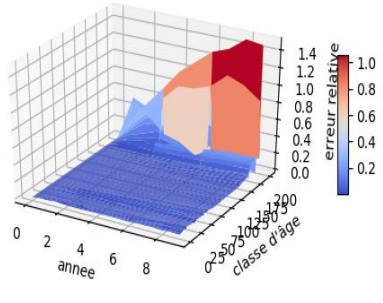


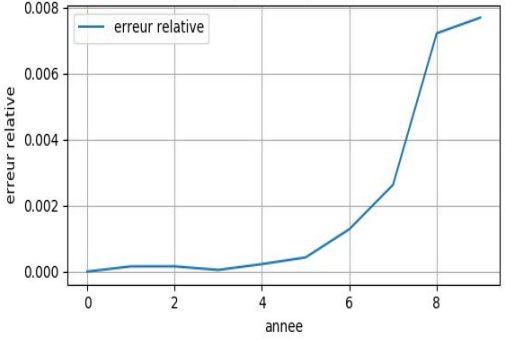


Evolution d'une population en 100 classes d'âges selon le modèle de notre composition
(temps discret)



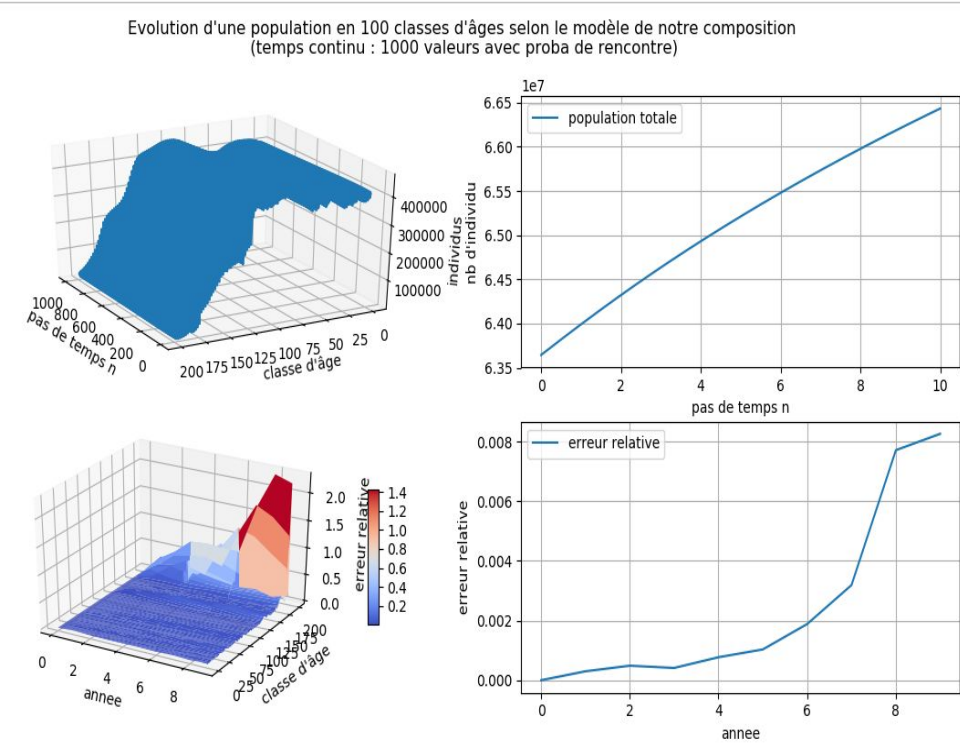


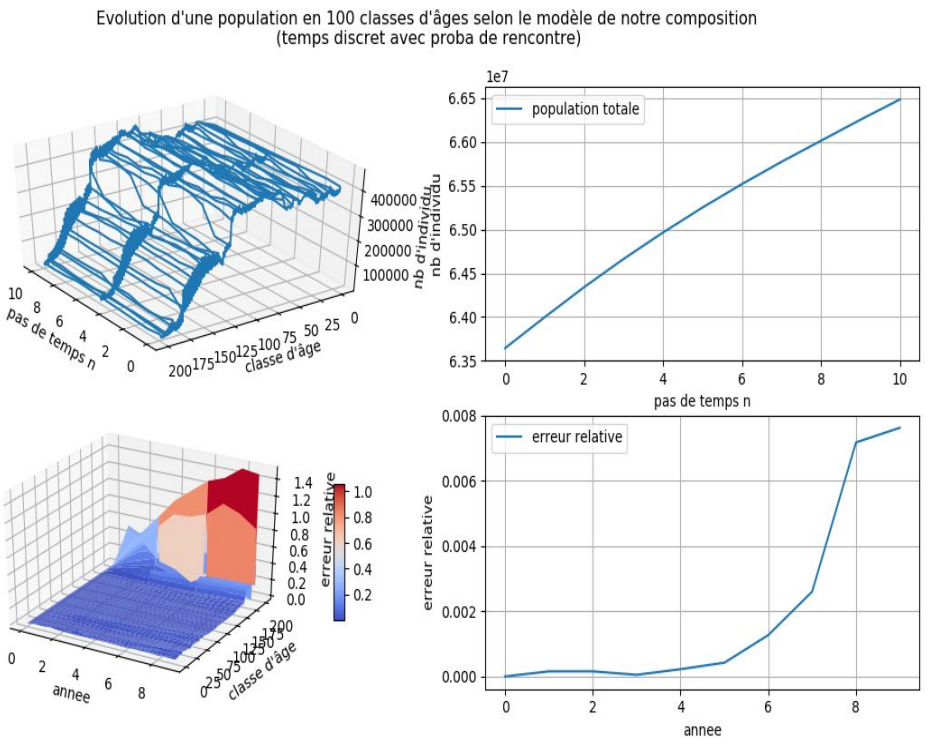




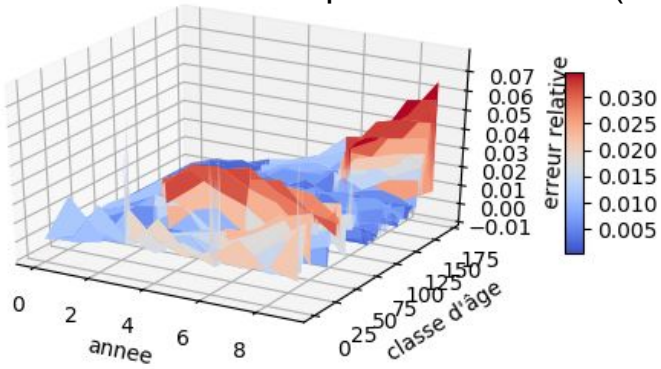
II) Création de modèles

b) *Modèle continu*

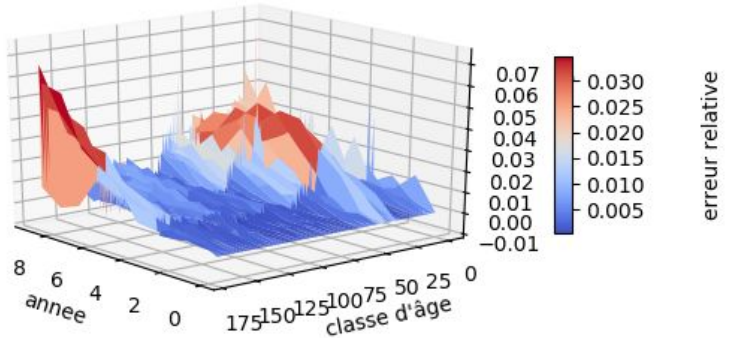




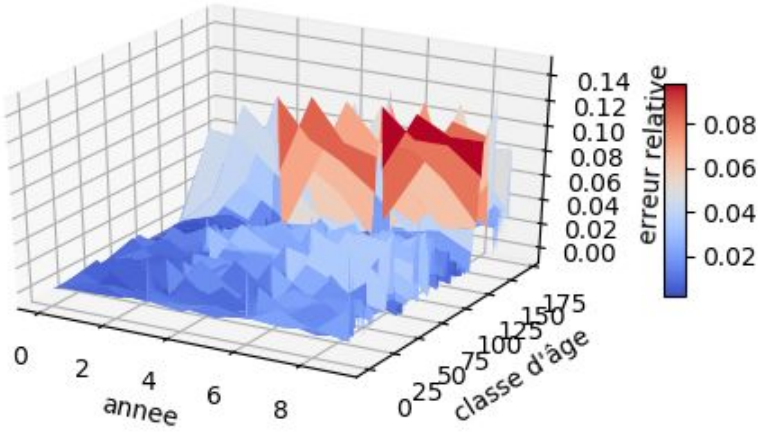
Evolution discrète de l’écart relatif de chaque classe d’âge en fonction du temps de 0 à 85 ans (sans proba)



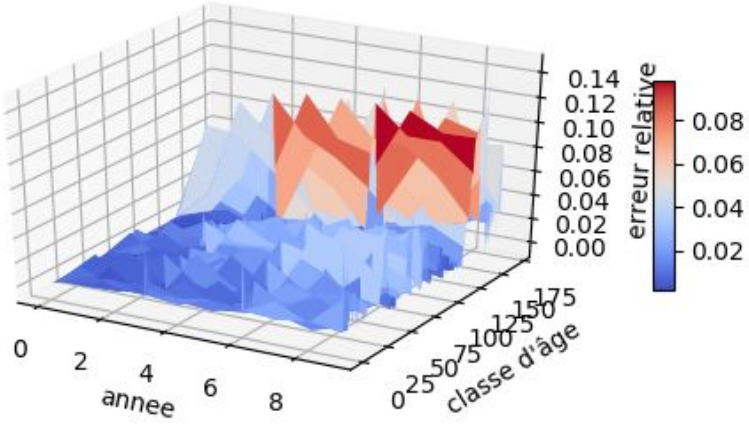
Evolution discrète de l’écart relatif de chaque classe d’âge en fonction du temps de 0 à 85 ans (avec proba)



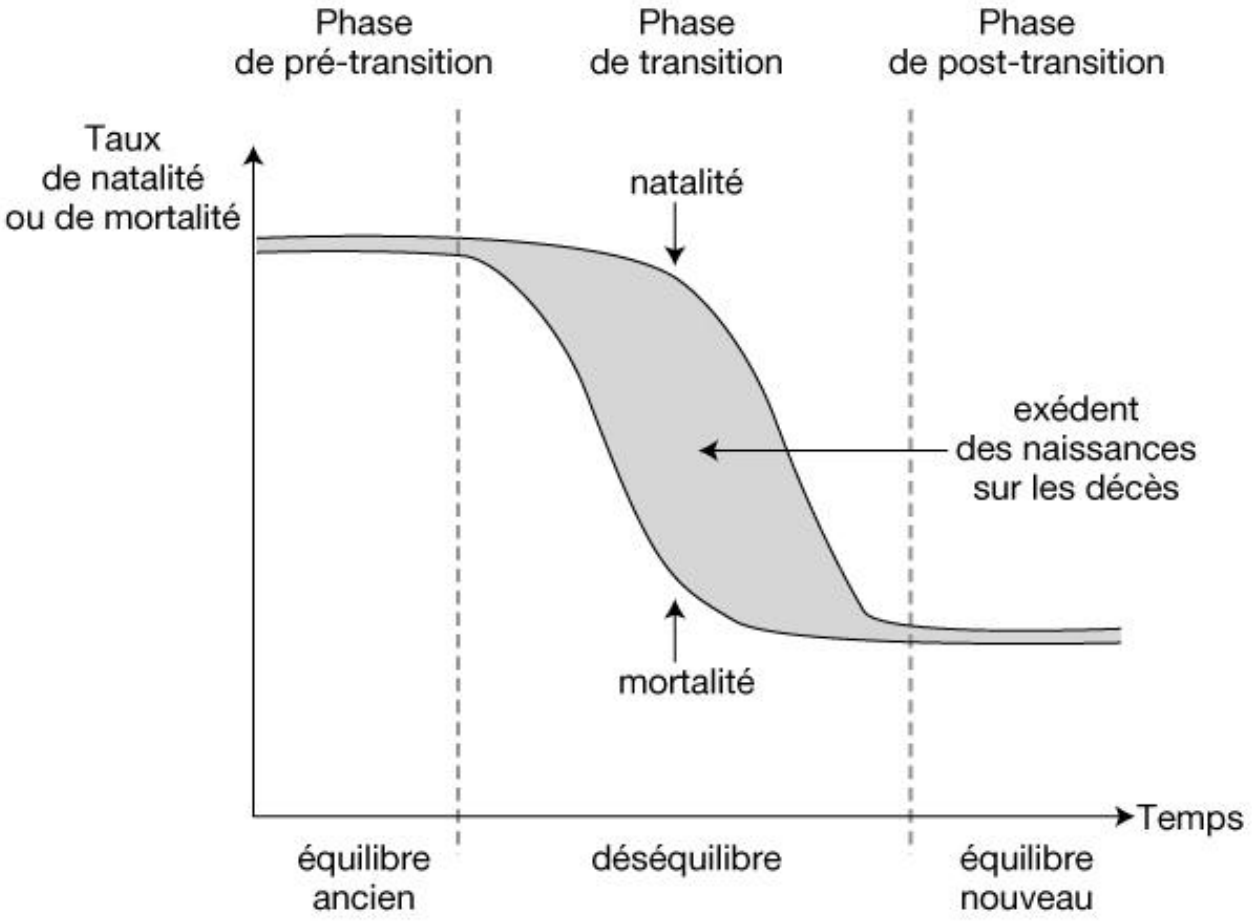
Evolution continue de l’écart relatif de chaque classe d’âge en fonction du temps de 0 à 85 ans (sans proba)



Evolution continue de l’écart relatif de chaque classe d’âge en fonction du temps de 0 à 85 ans (avec proba)



La transition démographique



Plan:

I) Approche naïve

II) Création de modèles

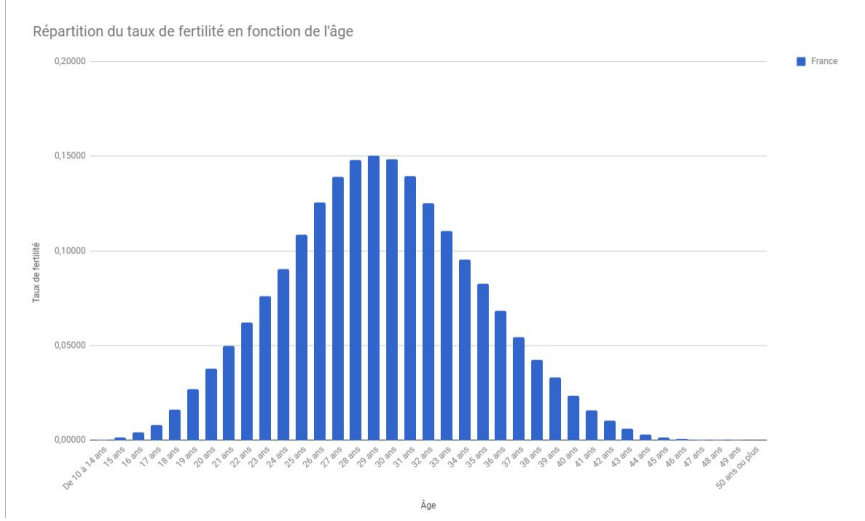
III) Analyse des taux et tests

III) Analyse des taux et tests

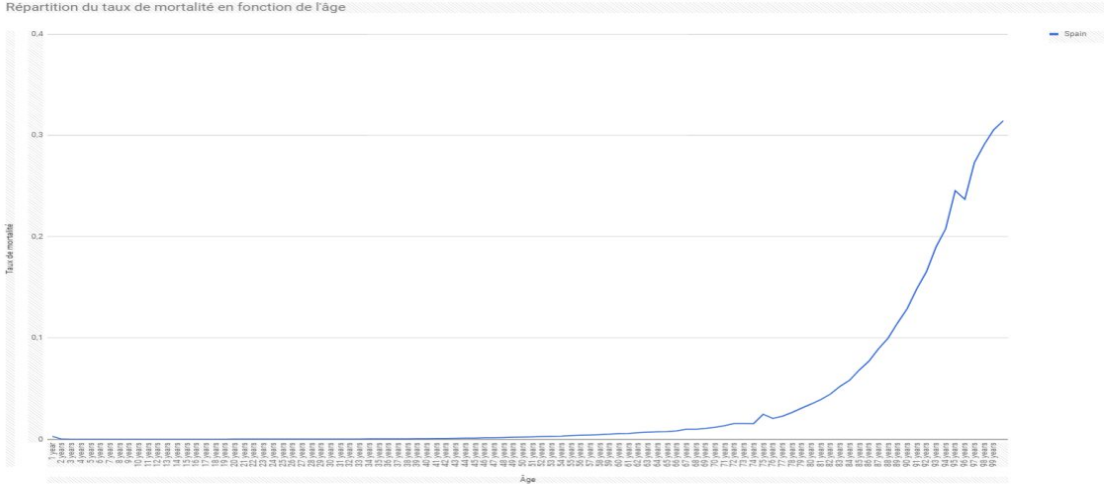
a) *Variation des taux en fonction de l'âge :*

Choix du modèle :

$$f(x,t) = A(t)\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$



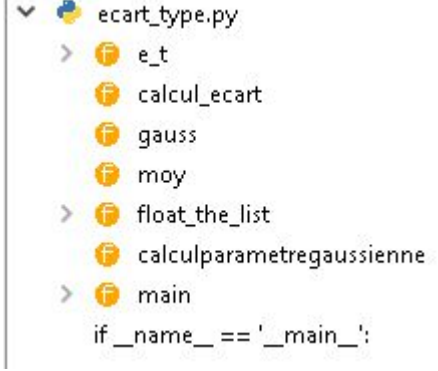
$$m(x,t) = A(t)\exp(\lambda x)$$

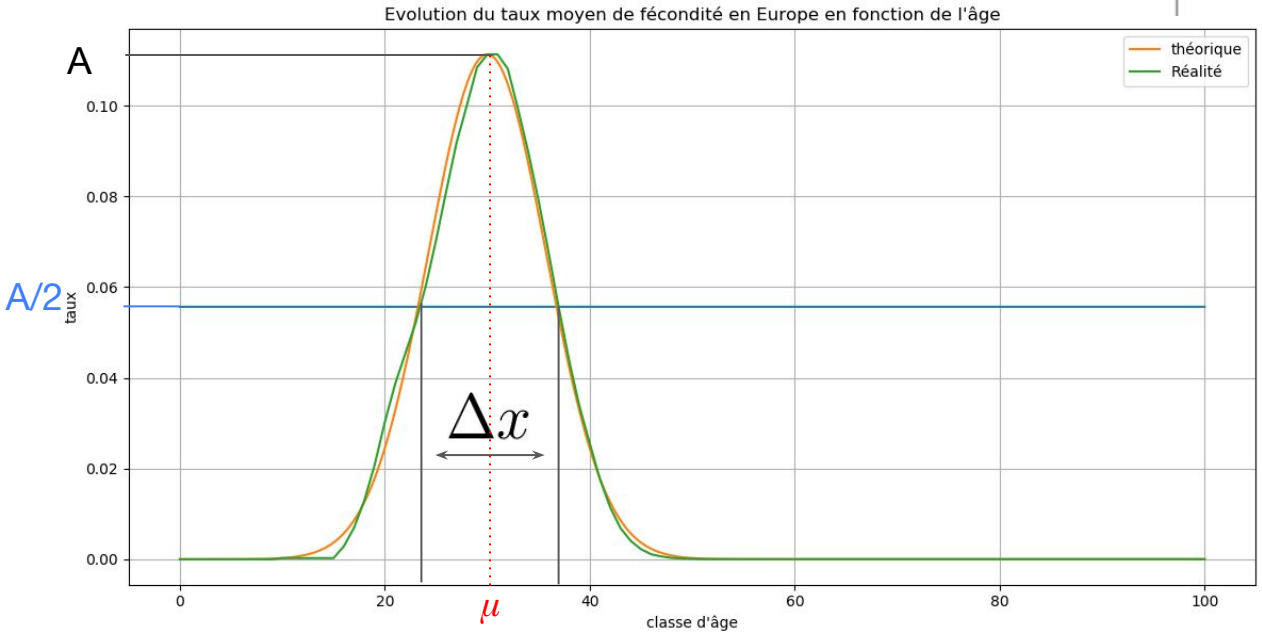


III) Analyse des taux et tests

a) *Variation des taux en fonction de l'âge :*

Méthodes informatique et résultats :



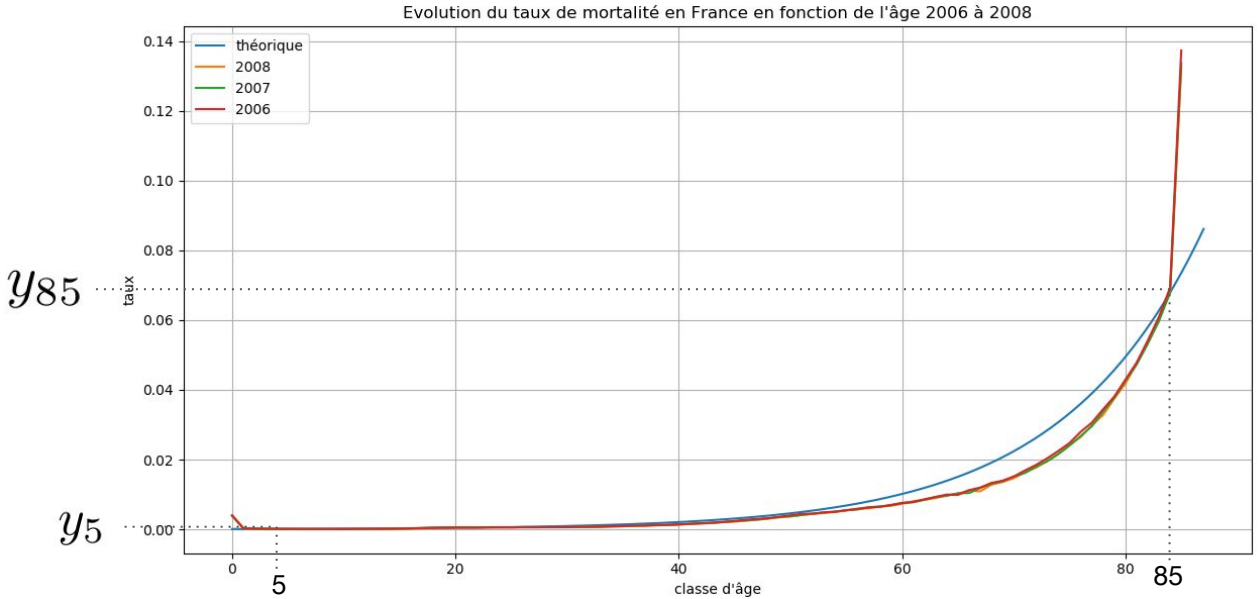


Largeur à mi hauteur de la gaussienne : $\Delta x = 2\sigma\sqrt{2\ln(2)}$

III) Analyse des taux et tests

a) *Variation des taux en fonction de l'âge :*

Méthodes informatique et résultats :



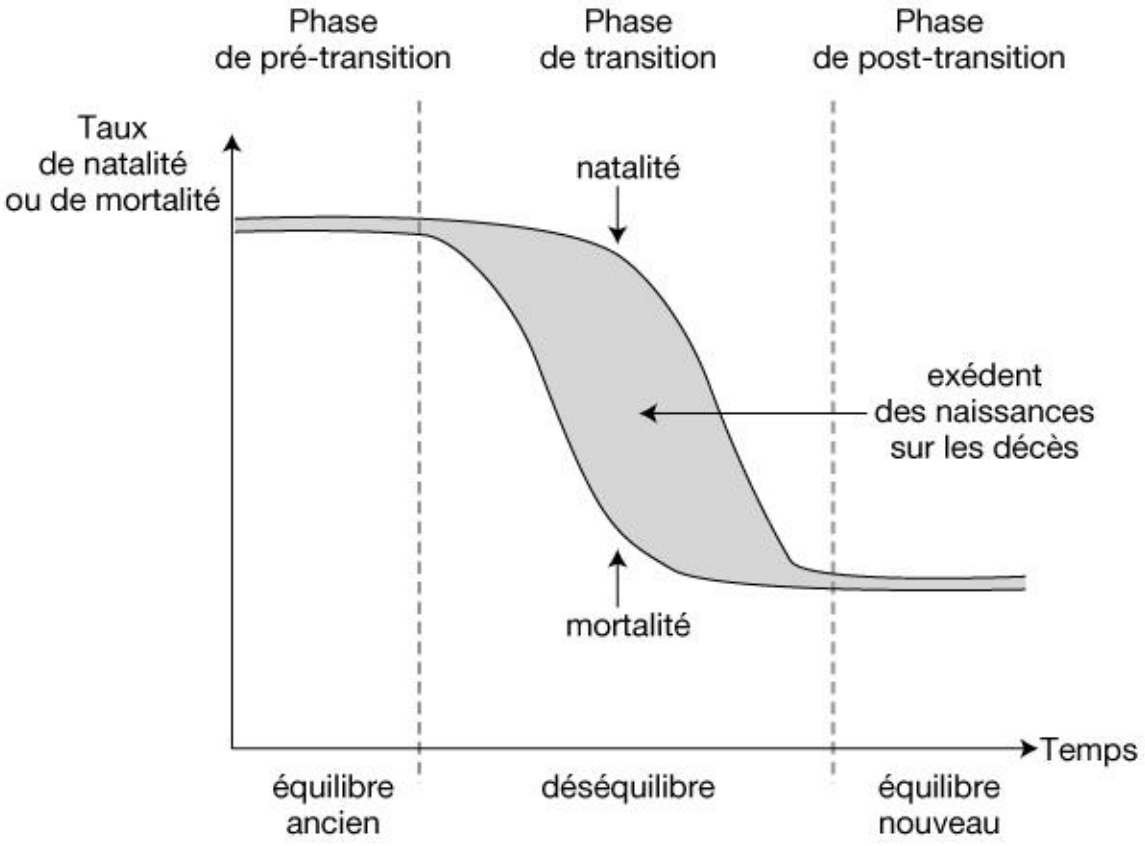
Paramètres de la fonction mortalité : $\begin{cases} \lambda = \dfrac{\ln(y_{85}/y_5)}{80} \\ A = \dfrac{y_5}{\exp(5\lambda)} \end{cases}$

III) Analyse des taux et tests

b) *Variation des taux en fonction du temps durant la transition*

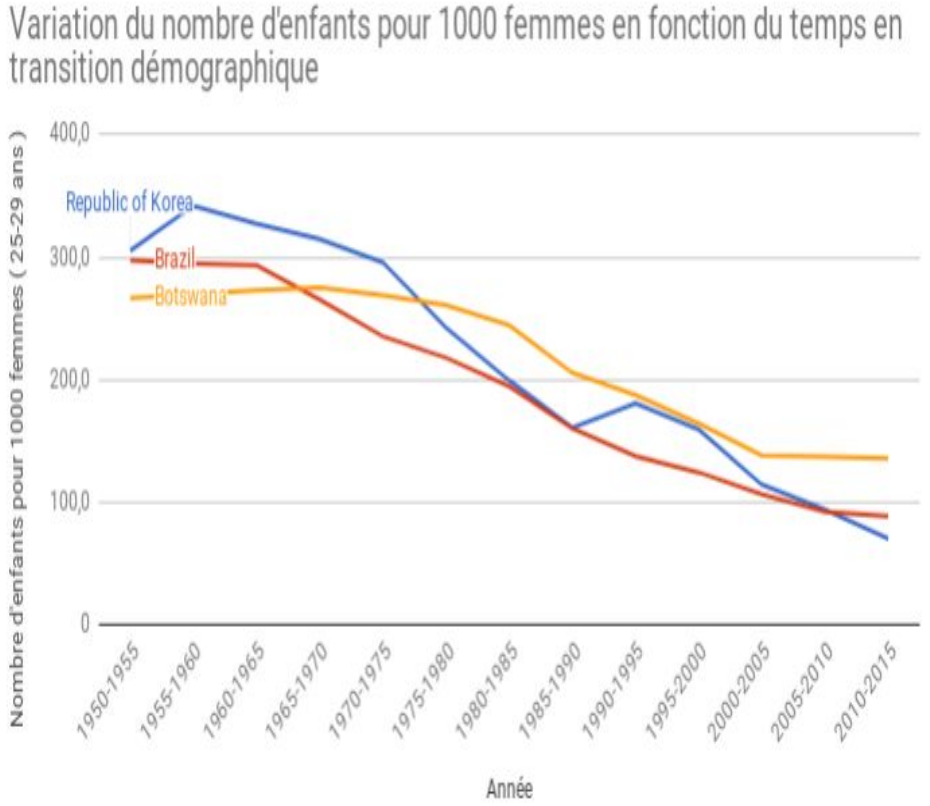
Explication du modèle :

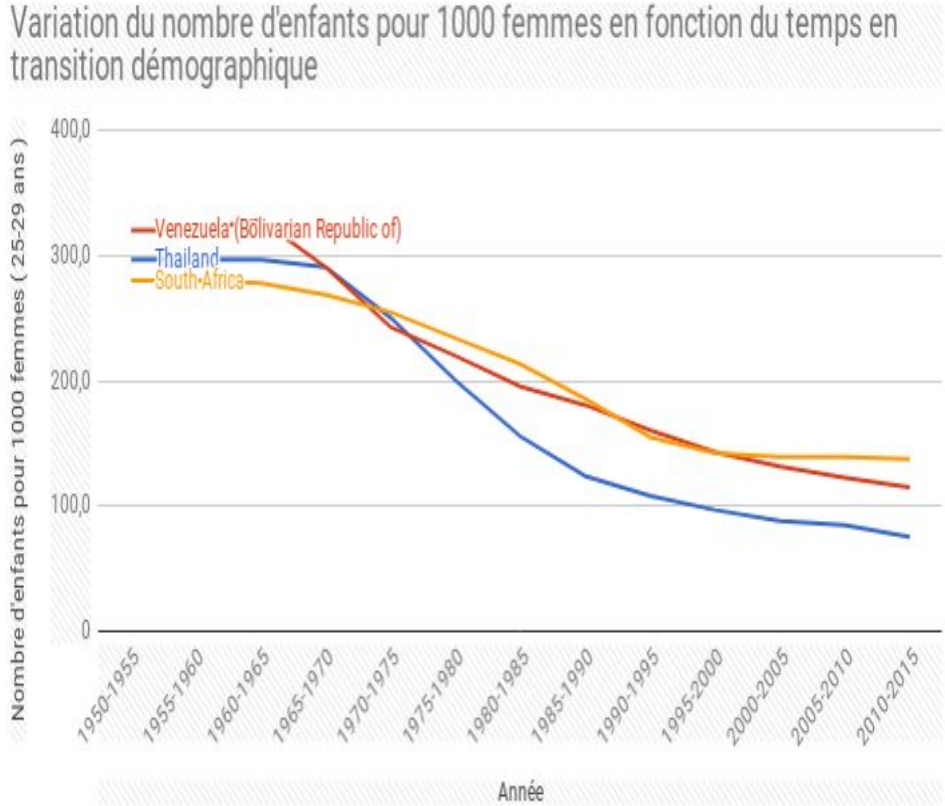
- Approximation linéaire basée sur l'exemple par détermination d'un taux d' équilibre haut moyen et d'un taux d'équilibre bas moyen : la "droite des taux"



III) Analyse des taux et tests

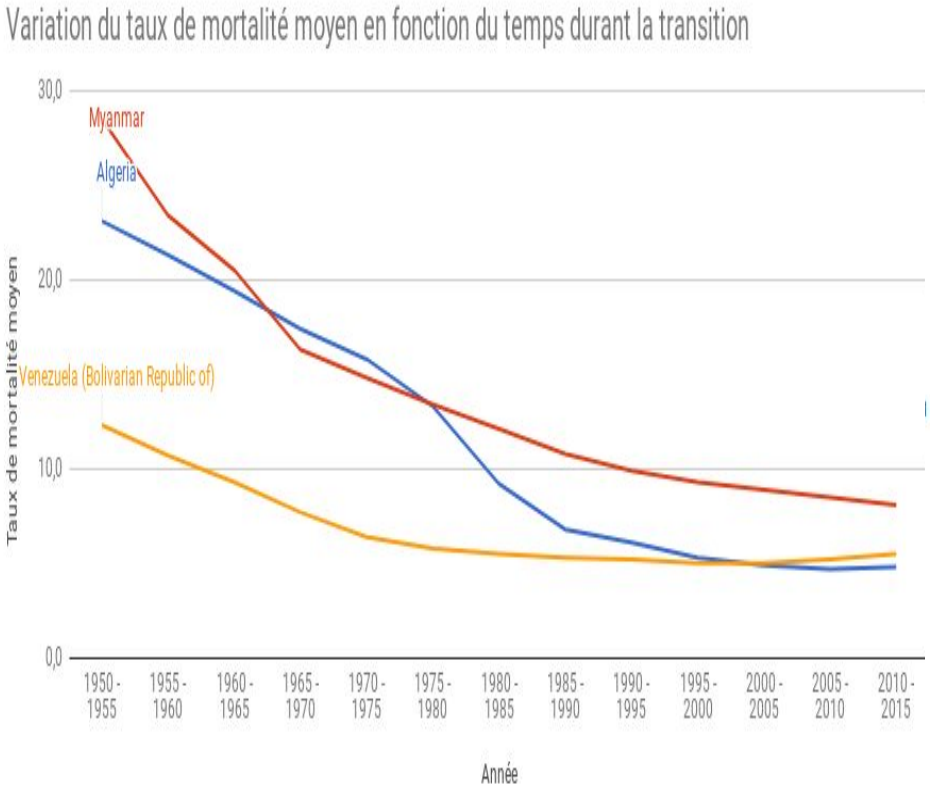
b) *Variation des taux en fonction du temps durant la transition*

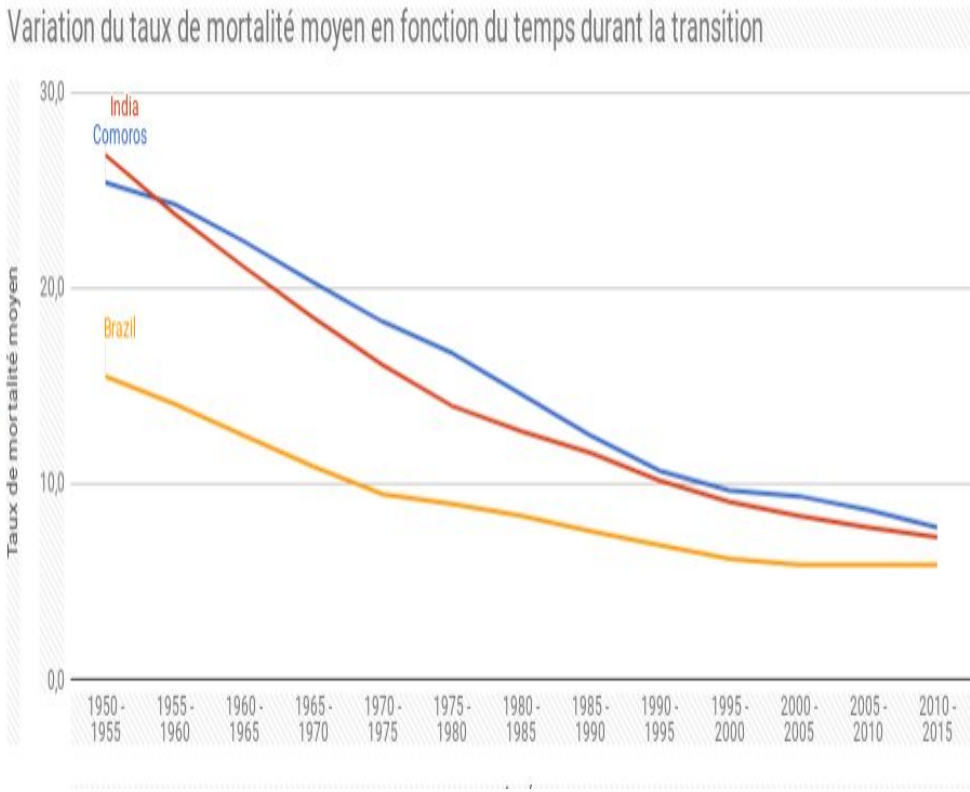




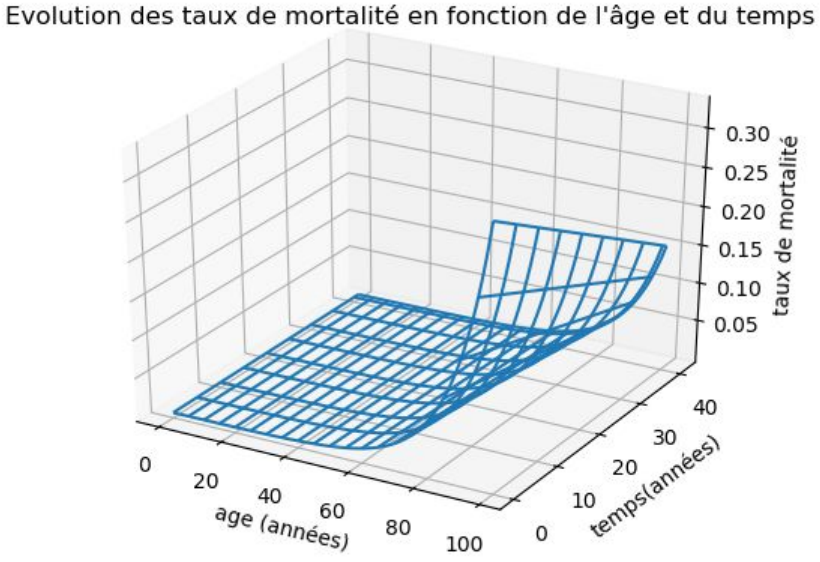
III) Analyse des taux et test

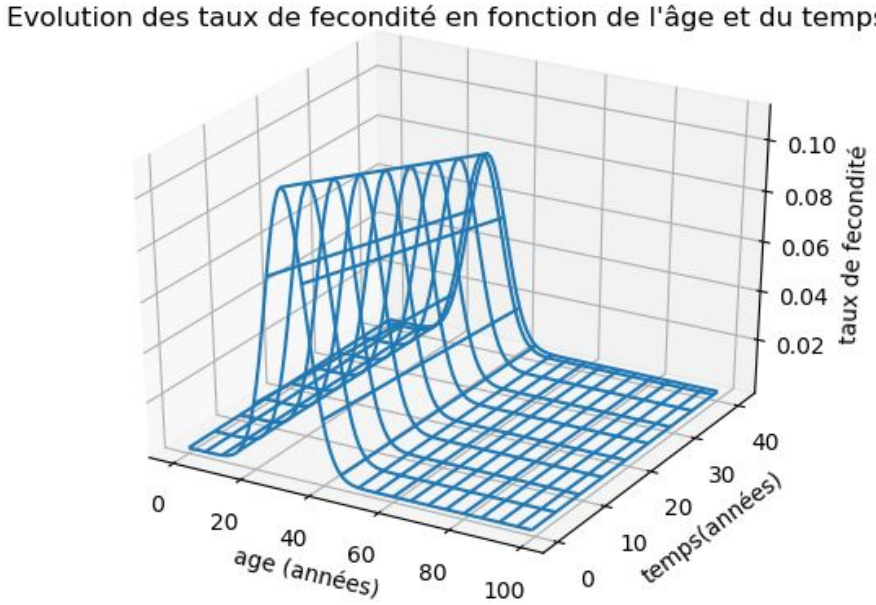
b) *Variation des taux en fonction du temps durant la transition*



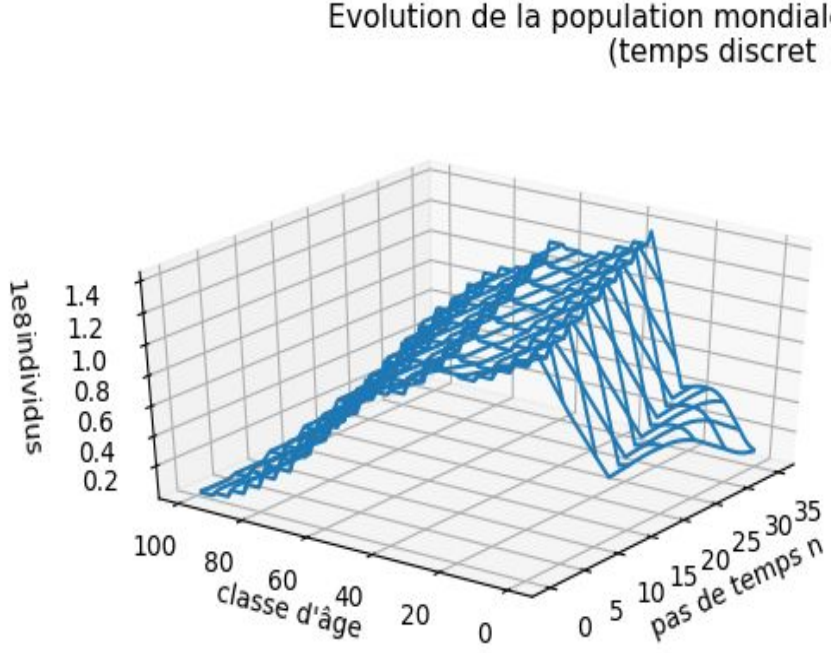


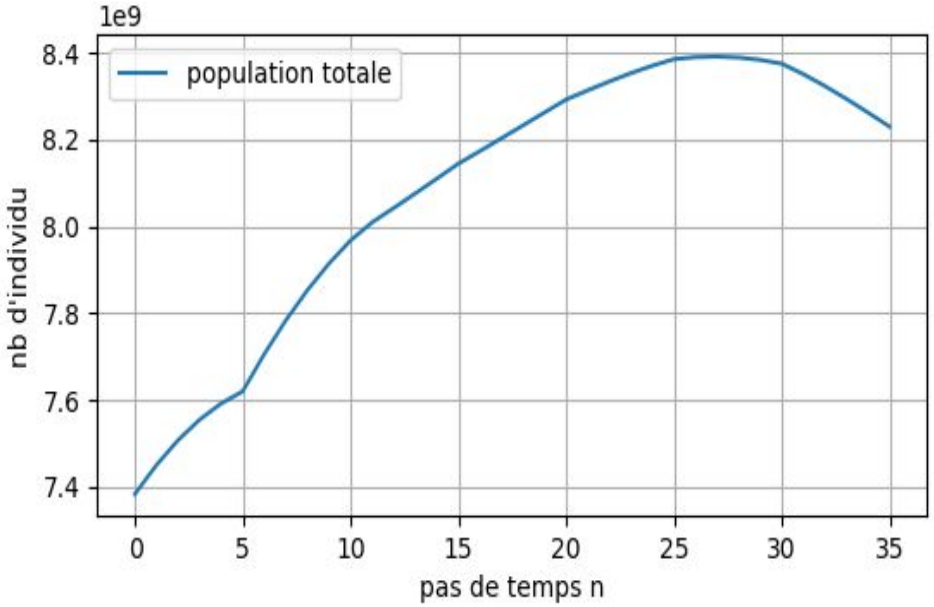
III) Analyse des taux et tests



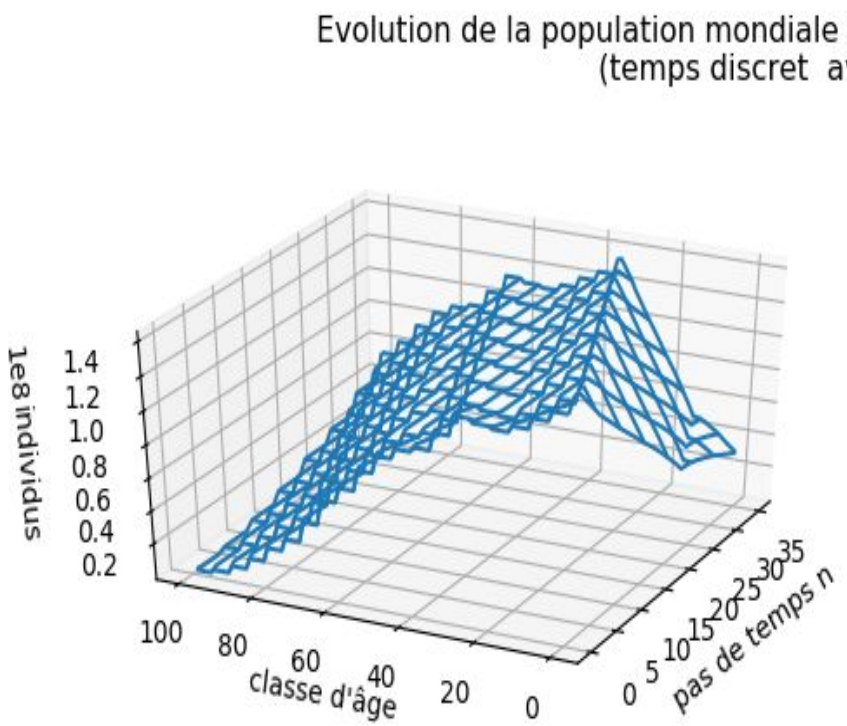


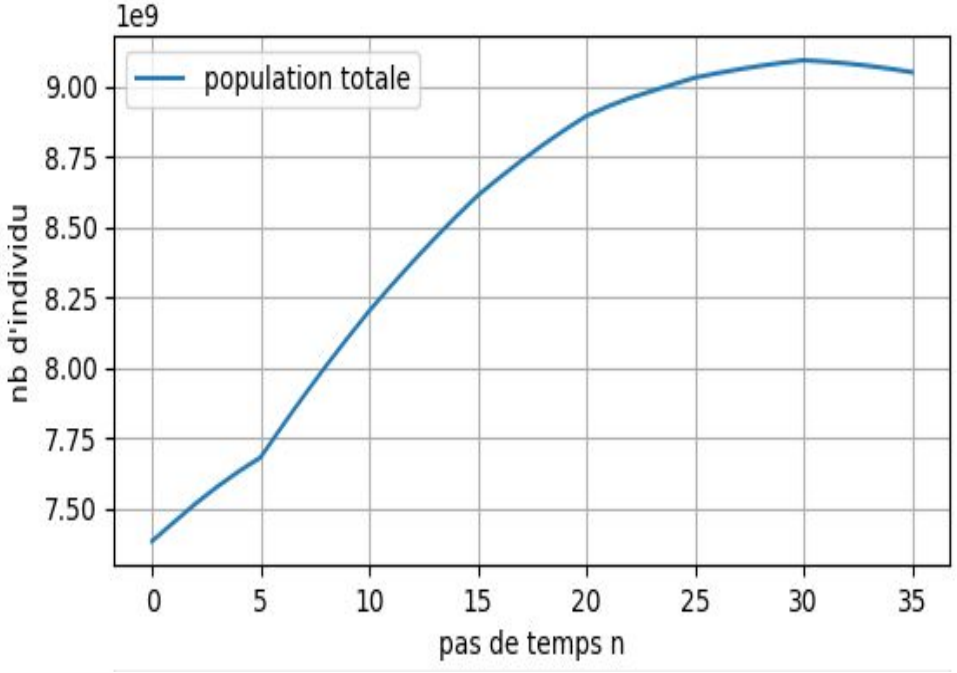
Conclusion


Evolution de la population mondiale en 100 classes d'âges selon le modèle de Leslie
(temps discret avec une transition de 10 ans)
1e8 individus
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
100
80
60
40
20
0
classe d'âge
0
5
10
15
20
25
30
35
pas de temps n

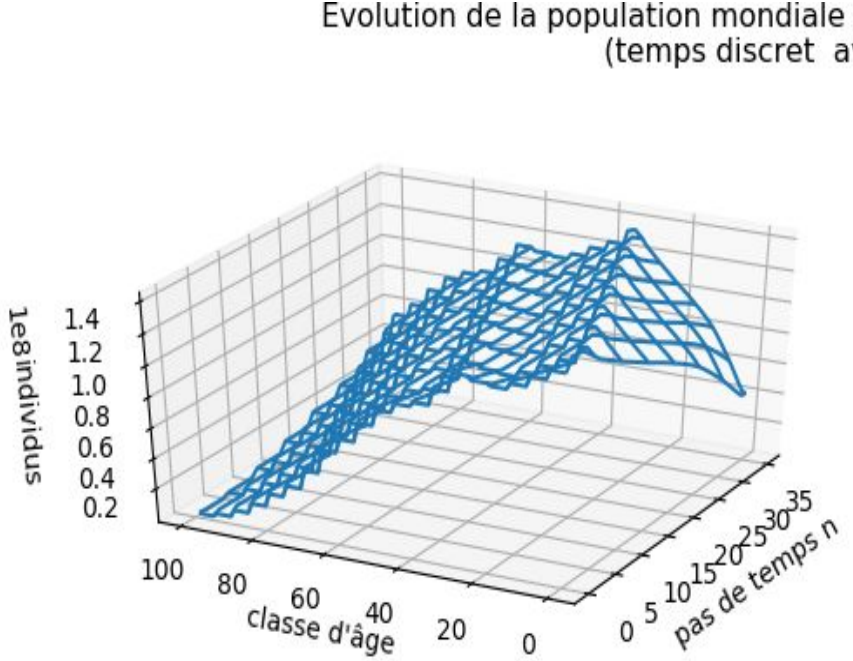

1e9
8.4
8.2
8.0
7.8
7.6
7.4
population totale
nb d'individu
0
5
10
15
20
25
30
35
pas de temps n

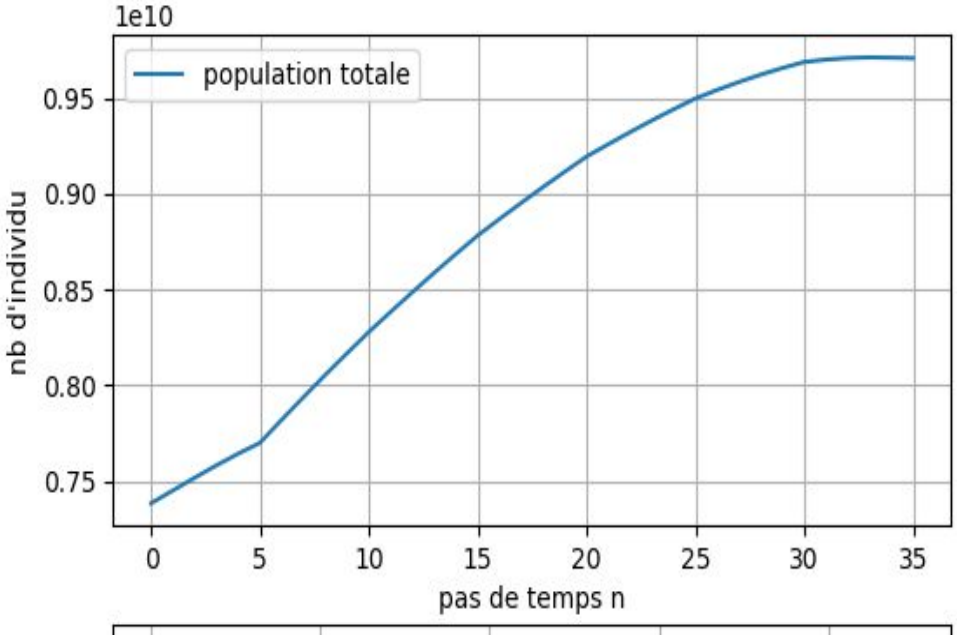
Conclusion


Evolution de la population mondiale en 100 classes d'âges selon le modèle de Leslie
(temps discret avec une transition de 20 ans)
1e8 individus
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
100
80
60
40
20
0
classe d'âge
0
5
10
15
20
25
30
35
pas de temps n

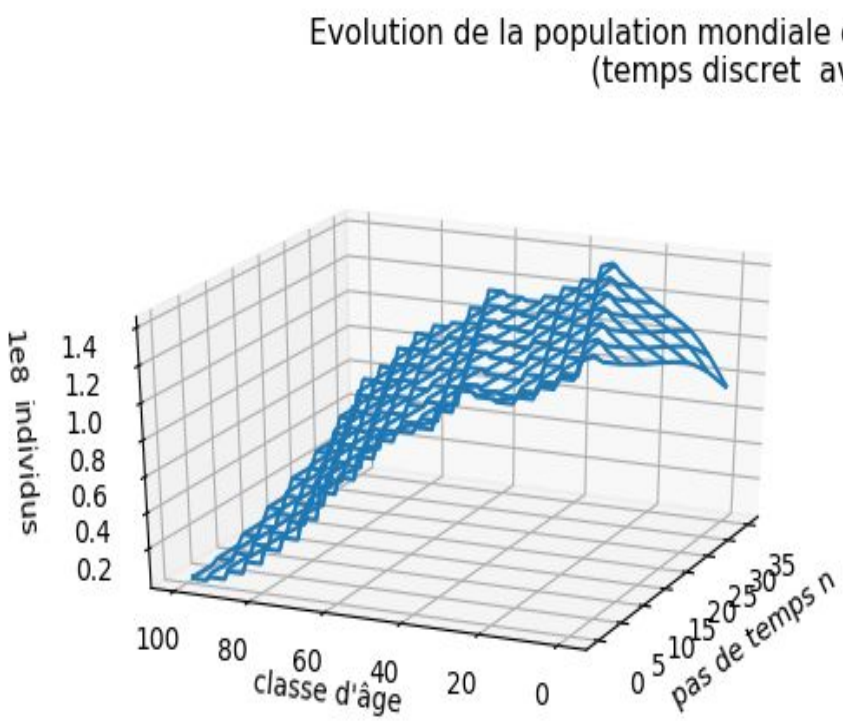

1e9
population totale
9.00
8.75
8.50
8.25
8.00
7.75
7.50
nb d'individu
0
5
10
15
20
25
30
35
pas de temps n

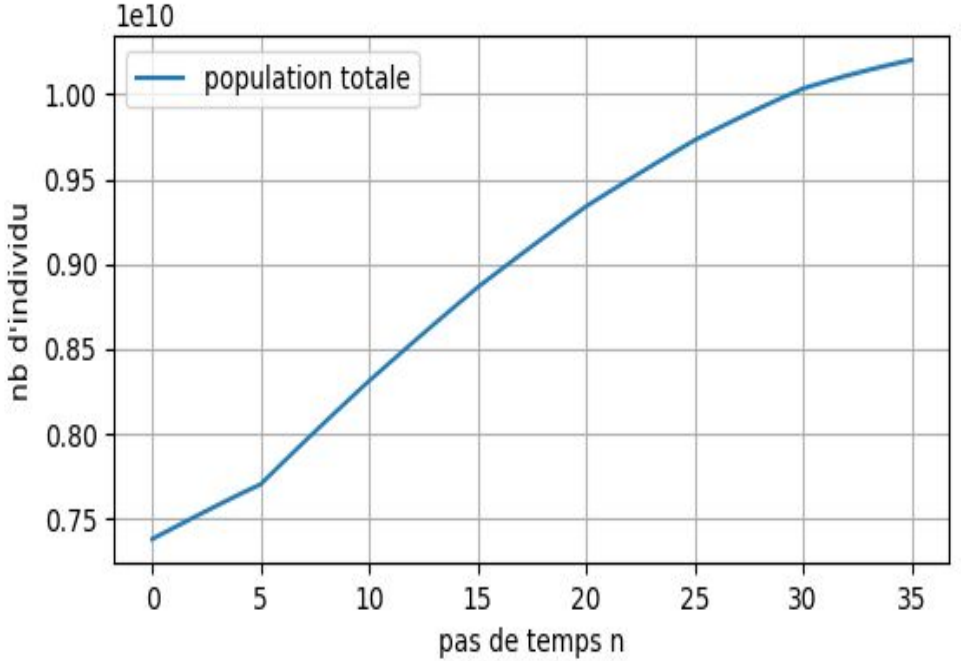
Conclusion


Evolution de la population mondiale en 100 classes d'âges selon le modèle de Leslie
(temps discret avec une transition de 30 ans)
1e8 individus
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
100
80
60
40
20
0
classe d'âge
0
5
10
15
20
25
30
35
pas de temps n


1e10
population totale
0.95
0.90
0.85
0.80
0.75
nb d'individu
0
5
10
15
20
25
30
35
pas de temps n

Conclusion


Evolution de la population mondiale en 100 classes d'âges selon le modèle de Leslie
(temps discret avec une transition de 40 ans)
1e8 individus
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
100
80
60
40
20
0
classe d'âge
0 5 10 15 20 25 30 35
pas de temps n


1e10
population totale
1.00
0.95
0.90
0.85
0.80
0.75
nb d'individu
0
5
10
15
20
25
30
35
pas de temps n

Conclusion

Modèle applicable à tout pays en présence:

- Du taux de fécondité maximum
- Du taux de mortalité à 5 ans et 85 ans
- Des taux d'immigration et d'émigration par classe d'âges